ние абсцисс фокусов каждой из конгруэнций пары.

Доказательство. В самом деле, условие нормальности конгруэнции $\{z_a\}$ ($a=1,2$) можно записать в виде:

$$(h_1-h_2)^2+\rho_a\rho_a' \sin^2(\alpha_1-\alpha_2)=0 \qquad (4)$$

Отсюда следует условие (2). Значит, такие пары есть пары $\bar\theta$. Пары θ_1 нормальных конгруэнций определяются системой уравнений (1),(2),(3),(4). Ортогональными являются пары, у которых соответствующие прямые перпендикулярны. Условие ортогональности пары θ можно записать в виде:

$$A_1=A_2 . \qquad (5)$$

Таким образом, ортогональные пары θ_1 нормальных конгруэнций определяются системой уравнений (1),(2),(3),(4),(5).
Дифференцируя уравнения (4), получим, учитывая (4) и (5):

$$H_1-H_2=\rho_1' d\rho_1+\rho_1 d\rho_1' \qquad (6)$$

Из равенства (6) следует, что в случае постоянства произведения $\rho_1\rho_1'$ постоянно и h_1-h_2, и обратно. Следовательно, ортогональные пары θ_1 нормальных конгруэнций имеют постоянное расстояние между соответствующими прямыми тогда и только тогда, когда постоянно произведение $\rho_1\rho_1'$.

Библиографический список

1. Редозубова О.С. Основы метрической теории пар θ конгруэнций/ МГПИ им.В.И.Ленина.М., 1983. Деп. ВИНИТИ 13.12.83, № 6752.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.18 1987

УДК 514.75

ОБ ОДНОМ ОТОБРАЖЕНИИ ГЛАДКОЙ Р-ПОВЕРХНОСТИ В ЕВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Е.В. Силаев
(МГПИ им.В.И.Ленина)

В работе рассматривается проекция поверхности на гиперсферу в евклидовом пространстве. Исследуются случаи различного расположения векторов средних кривизн поверхности и ее образа при проекции в соответствующих точках.

1. Пусть в n-мерном евклидовом пространстве E_n задана p-мерная поверхность V_p , лежащая на гиперсфере $S_{n-1}(O,r)$ с центром в точке O и радиусом r; $\vec{x}=\vec{Ox}$ -радиус-вектор текущей точки x поверхности V_p .

Присоединим к каждой точке x поверхности подвижной репер $R^x=\{x,\vec{e}_i,\vec{e}_\alpha\}$ $(i,j=1,2,\dots p;\ \alpha,\beta=p+1,\dots,n)$ так, чтобы векторы $\vec{e}_i$ лежали в касательном пространстве $T_x(V_p)$ в точке x , а векторы $\vec{e}_\alpha$ образовывали базис ортогонального дополнения к пространству $T_x(V_p)$ в точке x . В работах [2],[5] показано, что в этом случае

$$\vec{x}=x^\alpha\vec{e}_\alpha, \quad \vec{A}\cdot\vec{x}=-1. \qquad (1)$$

Зададим на V_p гладкую функцию $\lambda=\lambda(x)$ точки x . При смещении точки x по поверхности V_p точка x' , $\vec{Ox'}=\lambda\vec{Ox}$ описывает поверхность $\bar V_p$. Определим отображение $f: V_p\to\bar V_p$ следующим образом: $f(x)=x' \Leftrightarrow \vec{Ox'}=\lambda\vec{Ox}$. Предположим, что f является диффеоморфизмом, тогда отображение f^{-1} назовем [3] проекцией поверхности $\bar V_p$ на гиперсферу. Известна связь вторых фундаментальных тензоров b^α_{ij} и $\bar b^\alpha_{ij}$ поверхностей V_p и $\bar V_p$ в соответствующих точках x и x' проекции:

$$b^\alpha_{ij}=\frac{1}{\lambda}\bar b^\alpha_{ij}+\frac{x^\alpha}{\lambda}K_{ij}, \qquad (2)$$

где K_{ij} -некоторые функции специального вида.
Из формул (1) и (2) следует, что

$$\vec{M} = \frac{1}{\lambda}\left(\frac{1}{p}\gamma^{ij}\bar{b}^{\alpha}_{ij}\vec{e}_\alpha\right) + \frac{1}{\lambda}(\gamma^{ij}K_{ij})\vec{x}, \qquad (3)$$

где $\vec{M} = \frac{1}{p}\gamma^{ij}b^{\alpha}_{ij}\vec{e}_\alpha$ -вектор средней кривизны [1] поверхности V_p в точке x по отношению к E_n, $\gamma_{ij} = \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j$. Известно [4], что поверхность $V_p \subset S_{n-1}(O,r)$ является минимальной по отношению к гиперсфере $S_{n-1}(O,r) \subset E_n$ тогда и только тогда, когда $\forall x \in V_p: \vec{M} \parallel \vec{x}$. Из сказанного и формул (3) и $\vec{Ox}' = \lambda \vec{Ox}$ вытекает

Т е о р е м а 1. Поверхность $\bar{V}_p \subset E_n$ проектируется на минимальную по отношению к гиперсфере $S_{n-1}(O,r)$ поверхность V_p тогда и только тогда, когда $\forall x' \in \bar{V}_p: \frac{1}{p}\gamma^{ij}\bar{b}^{\alpha}_{ij}\vec{e}_\alpha \parallel \vec{x}'$.

Можно доказать, что справедлива

Т е о р е м а 2. Пусть поверхность $\bar{V}_p \subset E_n$ проектируется на гиперсферу. $\forall x' \in \bar{V}_p$ вектор $\vec{M}'$ средней кривизны поверхности $\bar{V}_p$ в точке x' принадлежит пространству $N_x(V_p)$, ортогонально дополняющему пространство $T_x(V_p)$ в точке x, тогда и только тогда, когда либо отображение f является гомотетией (в случае $\lambda = \mathrm{const}$), либо $\vec{M}' \cdot \vec{x}' = 0$ (в случае $\lambda \neq \mathrm{const}$).

С л е д с т в и е. Пусть неминимальная поверхность $\bar{V}_p \subset E_n$ проектируется на гиперсферу. $\forall x' \in \bar{V}_p: \vec{M}' \cdot \vec{x}' = 0$ тогда и только тогда, когда $\vec{z}' \cdot \vec{M}' = 1$, где $\vec{z}' = \vec{x}' + \vec{M}'/M'^2$ -радиус-вектор центра средней кривизны поверхности $\bar{V}_p$ в точке x'.

2. Т е о р е м а 3. Пусть поверхность $\bar{V}_p \subset E_n$ проектируется на гиперсферу. 1) При $\lambda = \mathrm{const}$ $\forall x' \in \bar{V}_p: \vec{M}' = \frac{1}{\lambda}\vec{M}$. 2) При $\lambda \neq \mathrm{const}$ V_p является неминимальной поверхностью в E_n тогда и только тогда, когда $\forall x' \in \bar{V}_p: \vec{M}' \nparallel \vec{M}$.

Приведем доказательство в случае $\lambda \neq \mathrm{Const}$. Предположим, что $\forall x' \in \bar{V}_p: \vec{M}' \parallel \vec{M}$, т.е. $\vec{M}' = \xi \vec{M}$. Следовательно, вектор $\vec{M}'$ принадлежит пространству $N_x(V_p)$. По теореме 2 в рассматриваемом случае имеем $\forall x' \in \bar{V}_p: \vec{M}' \cdot \vec{x}' = 0$. Умножим обе части равенства $\vec{M}' = \xi \vec{M}$ скалярно на вектор $\vec{Ox}' = \lambda \vec{Ox}$, получим в силу равенства (1) и $\vec{M}' \cdot \vec{x}' = 0$, что $0 = \xi \vec{M} \cdot (\lambda \vec{X}) = \xi \lambda$, откуда $\xi = 0$ и $\vec{M}' = 0$, т.е. $\bar{V}_p$ -минимальная поверхность в E_n.

Обратно, если $\forall x' \in \bar{V}_p: \vec{M}' \nparallel \vec{M}$, то, очевидно, $\vec{M}' \neq \vec{0}$.

3. Т е о р е м а 4. Пусть поверхность $\bar{V}_p \subset E_n$ проектируется на гиперсферу. Тогда: 1) при $\lambda = \mathrm{const}$ $\forall x' \in \bar{V}_p: \vec{M}' \parallel \vec{x}'$ тогда и только тогда, когда поверхность V_p проектируется на минимальную по отношению к гиперсфере поверхность;

2) при $\lambda \neq \mathrm{const}$ $\forall x' \in \bar{V}_p: \vec{M}' \nparallel \vec{x}'$ тогда и только тогда, когда $\bar{V}_p$ является неминимальной поверхностью в E_n.

Приведем доказательство в случае $\lambda \neq \mathrm{const}$. Предположим, что $\forall x' \in \bar{V}_p: \vec{M}' \parallel \vec{x}'$. Тогда вектор $\vec{M}'$ принадлежит пространству $N_x(V_p)$. По теореме 2 в рассматриваемом случае имеем $\forall x' \in \bar{V}_p: \vec{M}' \cdot \vec{x}' = 0$. Из этого условия и сделанного предположения о том, что $\vec{M}' \parallel \vec{x}'$, где $\vec{x}' \neq \vec{0}$, следует, что $\vec{M}' = \vec{0}$.

Обратно, если $\forall x' \in \bar{V}_p: \vec{M}' \nparallel \vec{x}'$, то, очевидно, $\vec{M}' \neq \vec{0}$.

Библиографический список

1. Б а з ы л е в В.Т. О многомерных сетях в евклидовом пространстве // Литовский матем.сб. АН Лит.ССР.Вильнюс.1966. Т.УI, №4.С.475-491.

2. С и л а е в Е.В. Геометрия поверхности V_p, лежащей на гиперсфере в евклидовом пространстве // Геометрия погруженных многообразий: Сб.науч .тр.М., 1983.С.99-104.

3. С и л а е в Е.В. О проекции р-поверхностей на гиперсферу в евклидовом пространстве/ МГПИ им.В.И.Ленина.М., 1983.16 с.

4. Kentaro Yano. Submanifolds with parallel mean curvature vector of a euclidean space or a sphere // Kodai math. semin. septs., 1971. vol.23. №1. P. 144-159.

5. Chen Bang-Yen. Submanifolds in a euclidean hypersphere.- Proc. Amer. Math. Soc., 1971. vol.27, №3. P.627-628.